

หน่วยที่ 11

ทฤษฎีการทับซ้อน (Superposition's Theorem)

บทนำ

ในวงจรไฟฟ้าแบบที่มีแหล่งจ่ายพลังงาน (แหล่งกำเนิดกระแสหรือแหล่งกำเนิดแรงดัน) มากกว่าหนึ่งตัวนั้น เรามักจะพบอยู่บ่อย ๆ และในวงจรเหล่านี้ จะมีกระแสไหลในสาขาต่าง ๆ ของวงจรหรือมีความต่างศักย์เกิดขึ้นในระหว่างจุดต่าง ๆ ภายในวงจรเป็นจำนวนมาก ซึ่งกระแสหรือความต่างศักย์ดังกล่าวนี้ จะมีความสัมพันธ์โดยตรงกับแหล่งจ่ายพลังงานแต่ละตัว ย่อมเป็นอิสระต่อกัน

ฉะนั้นเราจึงสามารถที่จะแยกการพิจารณาค่าของกระแสหรือแรงดันที่เกิดจากแหล่งจ่ายพลังงานแต่ละตัวที่เป็นอิสระต่อกัน แล้วนำค่าของกระแสหรือแรงดันที่ได้จากแหล่งจ่ายที่จ่ายพลังงานแต่ละตัวมารวมกัน ก็จะทำให้ได้ค่าของกระแสหรือแรงดันที่แท้จริงของวงจร ซึ่งการแยกการพิจารณาค่าปริมาณทางไฟฟ้า (กระแสหรือแรงดัน) ต่าง ๆ ที่เกิดจากแหล่งจ่ายพลังงานแต่ละตัวนี้ เราจะนำหลักการทฤษฎีการทับซ้อน (Superposition's Theorem) มาใช้ในการคำนวณเพราะจะช่วยให้การวิเคราะห์วงจรง่ายขึ้น นอกจากนี้ วงจรไฟฟ้าที่มีแหล่งจ่ายพลังงานตั้งแต่สองตัวขึ้นไปนั้นจะมีความเหมาะสมมาก เมื่อนำทฤษฎีการทับซ้อนมาใช้ในการวิเคราะห์และคำนวณ เพราะไม่ต้องใช้สมการที่ยุ่งยาก

หลักการทฤษฎีการทับซ้อน

ทฤษฎีของการวางซ้อน กล่าวไว้ว่า ในวงจรลิเนียร์หรือวงจรแบบเชิงเส้นใด ๆ ที่มีแหล่งจ่ายพลังงาน(แหล่งกำเนิดแรงดันหรือแหล่งกำเนิดกระแส) ตั้งแต่หนึ่งตัวขึ้นไป เมื่อนำค่ากระแสที่เกิดจากแหล่งจ่ายพลังงานแต่ละตัวที่จ่ายพลังงานให้แก่วงจรอย่างอิสระมารวมกันทางพีชคณิต ก็จะทำให้ได้ค่าของกระแสที่ไหลในสาขาต่าง ๆ ของวงจรที่แท้จริงในขณะนั้น

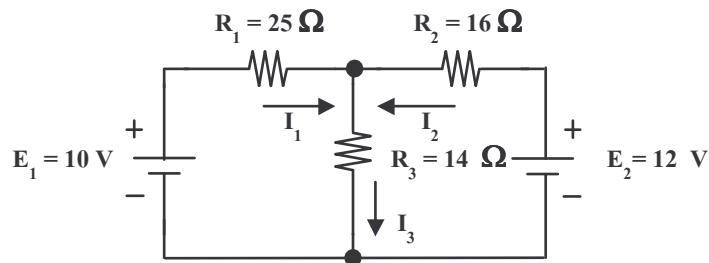
นั่นคือ การนำทฤษฎีการทับซ้อนมาใช้วิเคราะห์วงจร เราจะต้องพิจารณาแหล่งจ่ายพลังงานทีละตัว กล่าวคือ ในตอนแรกให้มีแหล่งจ่ายหนึ่งตัวในวงจร ส่วนแหล่งจ่ายพลังงานตัวอื่น ๆ ให้พิจารณาดังนี้คือ ถ้าเป็นแหล่งกำเนิดแรงดันให้ลัดวงจรและคิดเฉพาะความต้านทานภายในของแหล่งกำเนิดแรงดันเท่านั้น แต่ถ้าเป็นแหล่งกำเนิดกระแส ให้เปิดวงจรและในตอนต่อ ๆ มาให้คิดจากแหล่งจ่ายพลังงานตัวอื่น ๆ ที่เหลือในวงจรทีละตัวในลักษณะทำนองเดียวกันกับในตอนแรก จนกว่าจะครบทุก ๆ ตัว

3. ลำดับขั้นของทฤษฎีการทับซ้อน

การนำทฤษฎีการทับซ้อนมาใช้ในการวิเคราะห์วงจร จะพิจารณาเป็นขั้น ๆ ดังต่อไปนี้

1. สมมติและกำหนดทิศทางของกระแสที่ไหลในสาขาต่าง ๆ ของวงจร
2. เลือกแหล่งจ่ายพลังงานหนึ่งตัว
3. พิจารณาแหล่งจ่ายพลังงานตัวอื่น ๆ ที่เหลือในวงจรทั้งหมดถ้าเป็นแหล่งกำเนิดแรงดันให้ลัดวงจร แต่ถ้าเป็นแหล่งจ่ายกระแสให้เปิดวงจร
4. ความต้านทานภายในของแหล่งจ่ายพลังงานทุก ๆ ตัว ยังคงให้ต่ออยู่ในวงจรตามเดิม
5. คำนวณค่าของกระแสหรือแรงดันตกคร่อมที่ความต้านทานแต่ละตัวในวงจร พร้อมทั้งสังเกตทิศทางและขั้วที่ถูกต้อง
6. กระทำซ้ำอีก ตั้งแต่ข้อ 2-5 สำหรับแหล่งจ่ายพลังงานที่เหลือแต่ละตัวในวงจร
7. นำค่าของกระแสที่ได้ในแต่ละครั้งมารวมกันทางพีชคณิต ก็จะได้ค่าของกระแสที่แท้จริงที่ไหลในสาขาต่าง ๆ ของวงจร

ตัวอย่างที่ 11.1 วงจรดังแสดงในรูปที่ 11.1 จงหาค่าของ I_1 , I_2 และ I_3

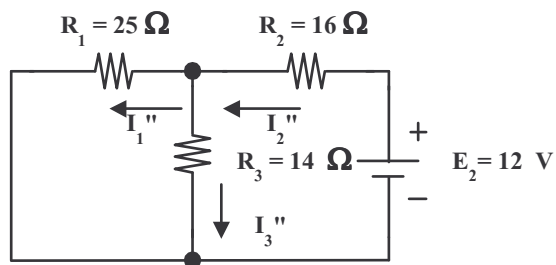


รูปที่ 11.1 ตัวอย่างที่ 11.1

วิธีทำ ตอนแรกเลือกพิจารณาเฉพาะแบตเตอรี่ E_1 แล้วเขียนวงจรใหม่ดังในรูปที่ 11.2 โดยการลัดวงจรแบตเตอรี่

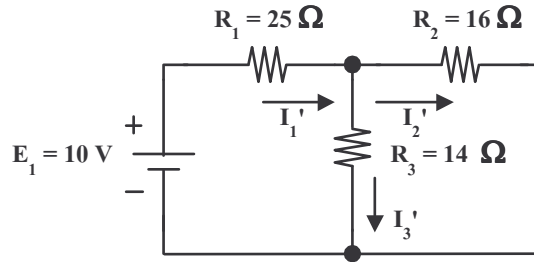
$$\begin{aligned}
 I_1' &= \frac{E_1}{R_1 + (R_2 // R_3)} \\
 &= \frac{E_1}{R_1 + (R_2 R_3 / R_2 + R_3)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{10}{25 + (16 \times 14 / 16 + 14)} \\
 &= 0.308 \text{ A} \\
 I_2' &= I_1' \frac{R_3}{R_2 + R_3} \\
 &= 0.308 \times \frac{14}{14 + 16} \\
 &= 0.1437 \text{ A} \\
 I_3' &= I_1' - I_2' \\
 &= 0.308 - 0.1437 \\
 &= 0.1643 \text{ A}
 \end{aligned}$$



รูปที่ 11.2 แสดงการเลือกแหล่งจ่ายที่ 1

ตอนหลังเลือกพิจารณาเฉพาะแบตเตอรี่ E_2 แล้วเขียนวงจรใหม่ดังแสดงในรูปที่ 11.3 โดยการลัดวงจรที่แบตเตอรี่ E_1



รูปที่ 11.3 แสดงการเลือกแหล่งจ่ายที่ 2

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_2 + (R_1 R_2 / R_1 + R_2)}$$

$$= \frac{10}{16 + (25 \times 14 / 25 + 14)}$$

$$= 0.4805 \text{ A}$$

$$I_1'' = I_2'' \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 0.4805 \times \frac{14}{25 + 16} = 0.1725 \text{ A}$$

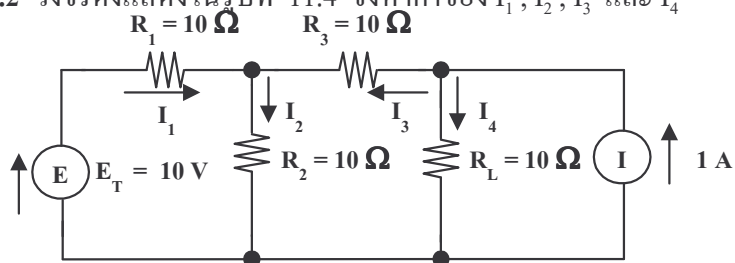
$$I_3'' = I_2'' - I_1'' = 0.4805 - 0.1725 = 0.308 \text{ A}$$

ดังนั้นค่าของกระแสที่แท้จริงที่ไหลในสาขาต่าง ๆ ของวงจรคือ

$$I_1 = I_1' - I_1'' = 0.308 - 0.1725 = 0.1355 \text{ A}$$

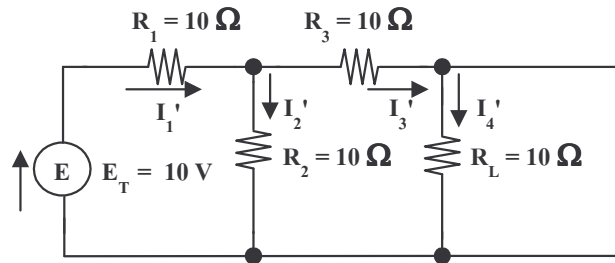
$$I_2 = I_2'' - I_2' = 0.4805 - 0.1437 = 0.3368 \text{ A}$$

$$I_3 = I_3' - I_3'' = 0.1643 - 0.308 = 0.4723 \text{ A}$$

ตัวอย่างที่ 11.2 วงจรดังแสดงในรูปที่ 11.4 จงหาค่าของ I_1, I_2, I_3 และ I_4 

รูปที่ 11.4 ตัวอย่างที่ 11.2

วิธีทำ ตอนแรกเลือกพิจารณาเฉพาะแหล่งกำเนิดแรงดัน E_T แล้วเขียนวงจรใหม่ในรูปที่ 11.5 โดยการเปิดวงจรแหล่งกำเนิดกระแส I



รูปที่ 11.5 แสดงการเปิดวงจรแหล่งกำเนิดกระแส
จากวงจรในรูปที่ 11.5 จะได้

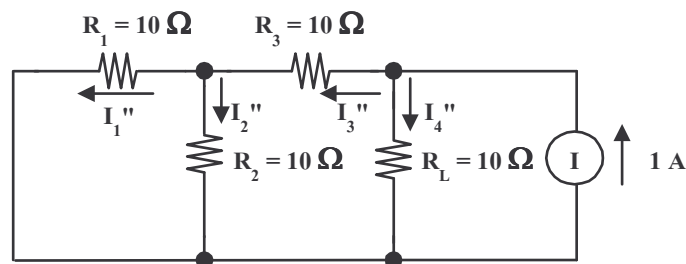
$$I_1' = \frac{E_T}{R_1 + [R_2(R_3 + R_4)/R_2 + R_3 + R_4]}$$

$$= \frac{10}{10 + [10(10 + 10)/10 + 10 + 10]} = 0.6 \text{ A}$$

$$I_2' = I_1' \frac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = 0.6 \times \frac{20}{60} = 0.4 \text{ A}$$

$$I_3' = I_4' = I_1' - I_2' = 0.6 - 0.4 = 0.2 \text{ A}$$

ต่อมาเลือกพิจารณาเฉพาะแหล่งกำเนิดกระแส I แล้วเขียนวงจรใหม่ดังในรูปที่ 11.6 โดยการลัดวงจรแหล่งกำเนิดแรงดัน E_T



รูปที่ 11.6 แสดงการลัดวงจรแหล่งกำเนิดแรงดัน
คำนวณหาค่ากระแสที่ไหลผ่านในสาขาต่าง ๆ โดยใช้หลักการของวงจรแบ่งกระแส

$$I_2'' = I \frac{R_4}{R_4 + R_3 + (R_1 R_2 / R_1 + R_2)}$$

$$= 1 \times \frac{10}{10+10+(10 \cdot 10/10+10)}$$

$$= 1 \times \frac{10}{25} = 0.4 \text{ A}$$

$$I_1'' = I_2'' = \frac{I_3''}{2} = \frac{0.4}{2} = 0.2 \text{ A}$$

$$I_4'' = I - I_3'' = 1 - 0.4 = 0.6 \text{ A}$$

ดังนั้น ค่าของกระแสที่แท้จริงที่ไหลในสาขาต่างๆ ของวงจร คือ

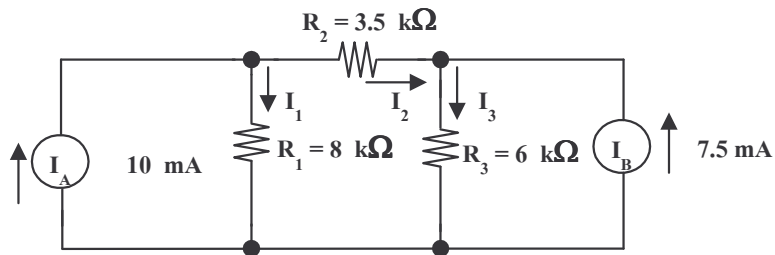
$$I_1 = I_1' - I_1'' = 0.6 - 0.2 = 0.4 \text{ A}$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' = 0.4 + 0.2 = 0.6 \text{ A}$$

$$I_3 = I_3'' - I_3' = 0.4 - 0.2 = 0.2 \text{ A}$$

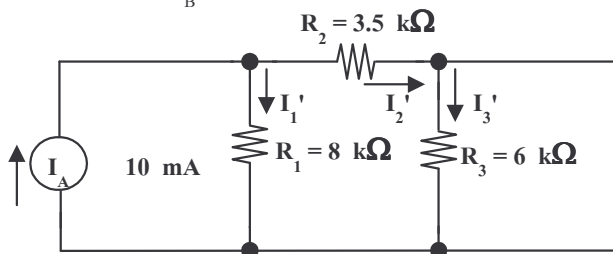
$$I_4 = I_4' + I_4'' = 0.2 + 0.6 = 0.8 \text{ A}$$

ตัวอย่างที่ 11.3 วงจรดังแสดงในรูปที่ 13.7 จงหาค่าของ I_1 , I_2 และ I_3



รูปที่ 11.7 ตัวอย่างที่ 11.3

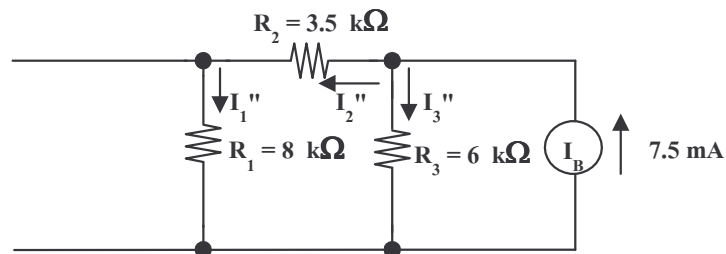
วิธีทำ ตอนแรกเลือกพิจารณาเฉพาะแหล่งกำเนิดกระแส I_A แล้วเขียนวงจรใหม่ในรูปที่ 13.8 โดยการเปิดวงจรแหล่งกำเนิดกระแส I_B



รูปที่ 13.8 แสดงการเปิดวงจรแหล่งกำเนิดกระแส I_B

$$\begin{aligned}
 I_2' &= I_3' = I_A \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \\
 &= 10 \text{ mA} \times \frac{8 \text{ k}\Omega}{8 \text{ k}\Omega + 3.5 \text{ k}\Omega + 6 \text{ k}\Omega} \\
 &= 4.5714 \text{ mA} \\
 I_1' &= I_A - I_2' = 10 \text{ mA} - 4.5714 \text{ mA} \\
 &= 5.4286 \text{ mA}
 \end{aligned}$$

ต่อมาเลือกพิจารณาเฉพาะแหล่งกำเนิดกระแส I_B แล้วเขียนวงจรใหม่ดังในรูปที่ 11.9 โดยการเปิดวงจรแหล่งกำเนิดกระแส I_A



รูปที่ 11.9 แสดงการเปิดวงจรแหล่งกำเนิดกระแส I_A

$$\begin{aligned}
 I_1'' &= I_2'' = I_B \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\
 &= 7.5 \text{ mA} \times \frac{6 \text{ k}\Omega}{8 \text{ k}\Omega + 3.5 \text{ k}\Omega + 6 \text{ k}\Omega} \\
 &= 2.5714 \text{ mA} \\
 I_3'' &= I_B - I_1'' = 7.5 \text{ mA} - 2.5714 \text{ mA} \\
 &= 4.9286 \text{ mA}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าของกระแสที่แท้จริงที่ไหลในสาขาต่างๆ ของวงจร คือ

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_1' + I_1'' = 5.4286 + 2.5714 = 8 \text{ mA} \\
 I_2 &= I_2' - I_2'' = 4.5714 - 2.5714 = 2 \text{ mA} \\
 I_3 &= I_3' + I_3'' = 4.5714 + 4.9286 = 9.5 \text{ mA}
 \end{aligned}$$